

C'est quoi une exponentielle ?

Expliquez-le à votre petite soeur

C'est quoi une exponentielle ?

C'est simplement la solution de l'équation différentielle $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$

Euh ...

Tu comprendras quand tu seras plus grande ...

Non, mais en vrai c'est quoi une exponentielle ?

Premier exemple : ralentissement

Imagine une voiture qui roule sur une route droite, qui se dirige vers le kilomètre 0, et qui en est au kilomètre 100, à la vitesse de 100 km/h. Elle ralentit constamment de telle manière qu'à tout instant, sa vitesse (en km/h) soit égale à la distance qui lui reste à parcourir (en km). Quand il lui reste 99 km, elle roule à 99 km/h, quand il lui reste 98 km, elle roule à 98 km/h, quand il lui reste 97,35 km, elle roule à 97,35 km/h, etc.

Quand arrivera-t-elle au kilomètre 0 ?

Eh bien, jamais, c'est évident !

Je croyais que tu ne savais pas ce qu'était une exponentielle ! Je suppose que tu as calculé la formule de la distance en fonction du temps et que tu as voulu résoudre la distance = 0 et que tu as vu qu'il n'y avait pas de solution ?

Non, je ne sais pas ce qu'est une exponentielle, je n'ai rien fait de tout ça, mais c'est évident. Quand il lui reste x km à parcourir, elle roule à x km/h, et elle va continuer à ralentir. Donc elle mettra au moins une heure pour arriver, et cela à tout moment. Quand elle sera à 10 cm du but, elle roulera à 10 cm à l'heure, il lui faudra au moins une heure pour l'atteindre. Mais comme elle ralentit, quand elle sera à 1 cm du but, il lui faudra au moins une heure pour l'atteindre. Et ainsi de suite : elle est toujours à au moins une heure du but. Donc elle n'arrivera jamais !

Très astucieux, mais tu éludes le problème.

Non, j'ai juste répondu à ta question. Pose m'en une autre !

D'accord : au bout de combien de temps atteindra-t-elle le kilomètre 90 ?

Eh bien , elle part à 100 km/h, elle doit parcourir 10 km et elle ralentit, donc elle mettra au moins $\frac{10}{100} = 0,1$ heure (6 minutes).

D'accord, mais tu as justement (brillamment) montré qu'avec « elle mettra au moins ... » elle pouvait ne jamais arriver. Prouve-moi qu'elle atteint bien à un moment le kilomètre 90, et combien de temps lui faut-il au pire ?

Je l'ai déduit implicitement de l'énoncé, qui dit qu'au kilomètre x elle roule à x km/h. D'ailleurs l'énoncé devrait dire : pour $x > 0$, puisqu'il y a un problème pour $x = 0$. Sa vitesse entre le kilomètre 100 et le kilomètre 90 est forcément supérieure ou égale à 90 km/h. Donc au pire, elle met $\frac{10}{90} \approx 0,11$ heure, soit au pire 6,67 minutes.

Bien. Continuons avec cette idée. Pour passer du kilomètre 90 au kilomètre 80, elle mettra au moins $\frac{10}{90} \approx 0,11$ heure et au plus $\frac{10}{80} = 0,125$ heure, donc entre 6,66 minutes et 7,5 minutes.

Pour passer du kilomètre 80 au kilomètre 70, elle mettra au moins $\frac{10}{80} = 0,125$ heure et au plus $\frac{10}{70} \approx 0,14$ heure, donc entre 7,5 minutes et 8,57 minutes.

Plus généralement, si $x > 10$, pour passer du kilomètre x au kilomètre $x - 10$ elle mettra au moins $\frac{10}{x}$ heure et au plus $\frac{10}{x-10}$ heure. Donc pour atteindre le kilomètre 10 elle mettra au moins $\frac{10}{100} + \frac{10}{90} + \frac{10}{80} + \frac{10}{70} + \frac{10}{60} + \frac{10}{50} + \frac{10}{40} + \frac{10}{30} + \frac{10}{20}$ heures (on additionne les durées pour un découpage des distances par tranches de 10 km). Cela fait environ 1,93 heure (115 minutes). De même elle mettra au plus $\frac{10}{90} + \frac{10}{80} + \dots + \frac{10}{10}$ heure, soit 2,83 heure (170 minutes).

Mais des tranches de 10 km, ce n'est pas très précis, on pourrait faire des tranches de 1 km.

Exact. l'encadrement serait alors meilleur (mais il y aurait plus de calculs). On trouverait alors que pour atteindre le kilomètre 10, il faudra entre 135 et 141 minutes. De même, avec des tranches très petites, on obtient finalement une valeur précise de 138,155 minutes. Par ce genre de calcul, on peut donc savoir (à peu près, mais aussi précisément qu'on veut) pour tout kilomètre x le temps t nécessaire pour arriver à ce kilomètre x , et inversement pour tout temps t le kilomètre x qu'on atteint.

Par exemple, pour atteindre le kilomètre 1, il faudra à peu près 4,6 heures. Pour arriver à 100 mètres du but, il faudra 6,9 heures. Pour arriver à 10 mètres du but, il faudra 9,2 heures. Pour arriver à 1 mètre du but, il faudra 11,5 heures. Pour arriver à 1 centimètre du but, il faudra 16,12 heures. Pour arriver à 1 millimètre du but, il faudra 18,4 heures.

Très impressionnant, mais c'est quoi une exponentielle ?

Eh bien, la fonction f qui donne le kilomètre atteint en fonction du temps ($f(t) = x$, par exemple $f(4,6) = 1$) est un phénomène de ralentissement « de type exponentiel

» : plus il s'approche du but, plus il ralentit. Il y a différents phénomènes de ce type. celui-là a été choisi parce qu'il est à peu près réaliste, du moins au début. Il se peut très bien qu'une voiture ralentisse de cette façon entre le kilomètre 100 et le kilomètre 70 par exemple.

Il y a d'autres phénomènes de ce type qui, eux, sont des accélérations au lieu de ralentissements, mais dans la nature ces accélérations ne durent pas indéfiniment (les vitesses et les distances atteintes deviendraient trop grandes).

La fonction exponentielle

Parmi les phénomènes d'accélération exponentielle, l'un d'entre eux sert de base au calcul de tous les autres, c'est le suivant : une voiture roule sur une route droite en accélérant, en s'éloignant du kilomètre 0, et on commence à la chronométrer lorsqu'elle est au kilomètre 1 (alors on prend comme temps $t = 0$). Sa vitesse au kilomètre x est exactement égale à x km/h. La fonction qui permet de calculer la distance x en fonction du temps t est appelée « la » fonction exponentielle et on la note $\exp : \exp(t) = x$.

Combien vaut $\exp(0,1)$ à peu près (c'est-à-dire : à quel kilomètre est-elle au bout de 6 minutes ?

6 minutes étant petit par rapport à une heure, je vais supposer que la voiture roule à une vitesse constante à partir du temps $t = 0$, c'est-à-dire à partir du kilomètre $x = 1$. Alors on peut considérer qu'elle roule à 1 km/h. Quand on roule à 1 km/h pendant 6 minutes, on parcourt 0,1 km (100 mètres). Donc on a à peu près $\exp(0,1) \approx 1 + 0,1$, soit $\exp(0,1) \approx 1,1$.

Pas mal du tout ! La « vraie » valeur est 1,10517

Et combien vaut à peu près $\exp(0,2)$ (c'est-à-dire au bout de 12 minutes) ?

Je pars de $\exp(0,1) \approx 1,1$ que j'ai déjà calculé pour 6 minutes. Donc au bout de 6 minutes, la vitesse est (à peu près) de 1,1 km/h. Maintenant on roule pendant 6 minutes de plus, en supposant que la vitesse est constante et égale à 1,1 km/h. Cela fait $1,1 \times 0,1$, soit 0,11 km (110 mètres). Cela se rajoute au kilométrage déjà obtenu, donc $\exp(0,2) \approx 1,1 + 0,11 = 1,21$

Bravo ! La vraie valeur est 1,2214.

Remarque : ton calcul dit que $\exp(0,2) \approx 1,1 + 1,1 \times 0,1 = 1,1 \times (1 + 0,1) = 1,1^2$.

Avec ce genre de calcul (et avec des tranches plus petites que 6 minutes), on arrive à calculer les valeurs de la fonction $\exp$ aussi précisément qu'on veut. Par exemple, $\exp(1)$ vaut 2,71828 (au bout d'une heure, la voiture est au kilomètre 2,71828).

Et quel est le rapport avec l'exemple précédent de la voiture qui ralentit ?

Dans l'exemple précédent, on peut montrer que la formule qui donne le kilomètre x en fonction du temps t est $x = \frac{100}{\exp(t)}$ (et on peut montrer que c'est $100 \exp(-t)$).

Par exemple, tu avais trouvé qu'il fallait 0,1 heure pour passer du kilomètre 100 au kilomètre 90, et tu viens de trouver que $\exp(0,1) \approx 1,1$.

Comparons à cette nouvelle formule : $\frac{100}{\exp(0,1)} \approx \frac{100}{1,1} \approx 90,9091$. A 900 mètres près, c'est effectivement 90 km.

« Une » fonction exponentielle ou « la » fonction exponentielle ?

Tu viens de parler de « la » fonction exponentielle. Mais ne dit-on pas parfois « une » fonction exponentielle ? Il y en aurait d'autres ?

Oui, mais le vocabulaire n'est pas forcément bien fixé à ce sujet. Pour être cohérent, il faudrait dire la chose suivante : on dit qu'une fonction est « une » exponentielle si et seulement si sa formule est de la forme $f(x) = \exp(ax)$, avec a constante. On montre que cela revient à dire que f est proportionnelle à sa dérivée (la distance est proportionnelle à la vitesse), avec $f(0) = 1$ (à l'instant 0, on est au kilomètre 1).

Par exemple, la fonction dans le premier exemple du ralentissement n'est pas une exponentielle en ce sens précis car $f(0) = 100$. Cependant, on dit souvent qu'elle est « de type exponentiel », car c'est la forme exponentielle mais avec un coefficient multiplicatif supplémentaire : $f(x) = 100 \exp(-x)$

Croissance exponentielle

En fait, j'avais déjà entendu le mot « exponentielle » : on parle parfois de « croissance exponentielle » quand quelque chose augmente très rapidement et énormément. Y a-t-il un rapport ?

Oui. On a vu que $\exp(1) \approx 2,718$. Cette valeur n'est pas énorme. $\exp(2) \approx 7,4$, ça va encore. $\exp(3) \approx 20,1$ (au bout de 3 heures, on atteint le km 20,1). A ton avis, quel kilomètre atteint-on au bout de 13 heures ?

Je ne sais pas, ça a l'air effectivement d'augmenter beaucoup. Ca a d'abord augmenté de 1,7 puis de 4,7, puis de 12,7. Mettons 1000 km ?

Non.

C'était un piège. Quand même pas 10 000 km ?

Non.

Je ne sais pas.

Eh bien, plus que la distance de la Terre à la Lune ! $\exp(13) \approx 442\,413$.

Exposant

Le mot « exponentielle » vient du mot « exposant », non ? Quel est le rapport ?

En gros, l'exponentielle de 2 c'est le carré d'un certain nombre, l'exponentielle de 3 c'est le cube de ce même nombre, l'exponentielle de 4 c'est la puissance quatrième de ce même nombre, etc.

Mais quel nombre, et pourquoi ?

Si tu admetts ce que je viens de dire et que tu l'appliques au cas du nombre 1, tu dois deviner de quel nombre il s'agit.

L'exponentielle de 1 serait la puissance « unième » ou « première » de ce nombre. Ah oui, et comme $a^1 = a$, c'est donc que ce nombre c'est $\exp(1)$. Donc on aurait $\exp(n) = (\exp(1))^n$, mais d'où ça vient ?

On peut en avoir une idée à partir du calcul approché que tu as fait pour $\exp(0,1)$ et $\exp(0,2)$:

Tu avais trouvé $\exp(0,1) \approx 1,1$, puis $\exp(0,2) \approx 1,1 + 1,1 \times 0,1$, soit en fait $\exp(0,2) \approx 1,1 \times (1 + 0,1)$, c'est à-dire $1,1^2$. De même, on trouvera $\exp(0,3) \approx 1,1^2 + 1,1^2 \times 0,1$, soit $1,1^3$. Puis $\exp(0,4) \approx 1,1^4$, ..., $\exp(1) \approx 1,1^{10}$, ..., $\exp(2) \approx 1,1^{20}$. Avec les valeurs approchées, on aurait bien $\exp(2) \approx (\exp(1))^2$ puisque d'après une formule sur les puissances $(a^{10})^2 = a^{20}$. Cela donne une idée de la raison pour laquelle on a finalement $\exp(n) = (\exp(1))^n$.

Et comme on avait calculé à peu près $\exp(1) \approx 2,71828$, cela donne une idée de la façon de calculer l'exponentielle des nombres entiers : $\exp(2) \approx 2,71828^2 \approx 7,389$

Ce nombre $\exp(1)$ est célèbre en mathématiques, on l'appelle e

Donc $\exp(n) = e^n$. Mais que voudrait dire $\exp(2,5)$? Ce serait $e^{2,5}$? Ça n'a pas de sens ! Pour e^2 j'écris deux facteurs : $e \times e$, pour e^3 j'écris trois facteurs $e \times e \times e$, mais pour $\exp(2,5)$, j'écris quoi ? Deux facteurs et demi ? Qu'est-ce que ça veut dire ?

Il est vrai que cela pose un problème de vocabulaire. Jusqu'en première, on définissait une puissance à l'aide d'un produit d'un nombre entier de facteurs identiques : $e^3 = e \times e \times e$, mais on n'a jamais défini le mot de « puissance » pour un exposant non entier. Eh bien, l'invention de l'exponentielle permet justement de proposer une définition cohérente qui comble ce manque. On ne cherche plus à définir $e^{2,5}$ à partir d'un produit, on le définit à partir de la fonction exponentielle, qu'on sait calculer (au moins de manière approchée, mais précisément). Autrement dit, au lieu de définir la signification de l'exponentielle (considérée comme inconnue) à partir d'une puissance (considérée comme connue), on fait l'inverse : on définit une puissance (considérée comme inconnue) à partir de l'exponentielle (considérée comme connue).

En gros : $e^{2,5}$, c'est le kilomètre auquel arrive la voiture de l'exemple de l'accélération au bout de deux heures et demie. Par des calculs approchés comme précédemment, c'est à peu près $1,1^{25} \approx 10,835$. La vraie valeur est 12,1825. Pour arriver plus près de cette valeur, il faut découper en tranches de temps plus petites, par exemple 0,0001 heure : $1,0001^{25000} \approx 12,181$. (il faut 25 000 tranches de 0,0001 heure pour arriver à 2,5).

Conclusion

Finalement, voyons si tu as compris, dis-moi ce qu'est la fonction exponentielle ?

Eh bien, finalement c'est assez simple, c'est la fonction $\exp$ définie par

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Euh ...

Tu comprendras quand tu seras plus grand ...